

砂卵石石孔隙计算模型研究

彭振斌 杨坪 李奋强 卢敦华

(中南大学地学与环境工程学院 长沙市 410083)

摘要 该文根据分形理论构造了砂卵石石的孔隙分形模型,研究了砂卵石石层颗粒分维、孔隙分维和孔隙度以及它们之间的关系,得到了砂卵石石颗粒分维、孔隙分维和孔隙度的计算式,对指导砂卵石石层中的注浆工程实践有重要的意义。

关键词 砂卵石石 分形结构 分维 孔隙度

Study of Count Model for Porosity of Sand and Gravel

Peng Zhenbin Yang Ping Li Fenqiang Lu Dunhua

(College of Geosciences & Environmental Engineering, Center South University)

Abstract The paper set up fractal model for porosity of sand and gravel by applying fractal theory, studied the fractal dimension number, porosity dimension number for grains of sand and gravel, porosity of sand and gravel and their relationship, obtained the formulas for calculating fractal dimension number, porosity dimension number for grains of sand and gravel and porosity of sand and gravel. It is important to instruct grouting engineering in sand gravel beds.

Keywords sand and gravel; fractal structure; fractal dimension; porosity

1 概况

砂卵石石层是目前常遇到的一种复杂地层,注浆作为一种处理砂卵石石层的方法已被广泛接受。然而,由于砂卵石石层本身的复杂性,注浆过程中出现了不少问题,如因无法准确确定砂卵石石的孔隙体积导致注浆材料的浪费和注浆后效果难以预测等。本文将运用分形理论,对砂卵石石的孔隙模型进行研究。

2 分形模型的构造

模型构造选用门杰(Menger)海绵体模型。将一个边长为 L 的正六面体作为初始元。生成元就是将正六面体进行27等分,去掉体心和各棱中间的13个小立方体,剩下的只有14个小立方体(即

$N_1=14, S_1=L/3$)。将上述操作重复下去直至无穷,使剩下的小立方体边长 S 不断减小,数目逐渐增多,最后,由立方体的集合形成门杰(Menger)海绵体^[1,2]。在几次操作之后,剩下的立方体边长 $S_n=L/3^n$,个数 N_n 为

$$N_n = (S_n/L)^{-D} \quad (1)$$

式中: $D = \lg N_1 / \lg 3 = \lg 14 / \lg 3$ 为剩下的立方体集合形成海绵体的分维。这个海绵体剩下的总体积 V_n 为

$$V_n = S_n^3 N_n = S_n^3 (S_n/L)^{-D} = L^D S_n^{3-D} \quad (2)$$

当 $n \rightarrow \infty, S_n \rightarrow 0, V_n \rightarrow V(s)$ 。对于这个极限有

$$\frac{dV(s)}{ds} = L^D S^{2-D} \quad (3)$$

这时孔隙体积 $V_h(s)$ 为

$$V_h(s) = L^3 - V(s) \quad (4)$$

所以,

$$\frac{dV_h(s)}{ds} = -\frac{dV(s)}{ds} = -L^D S^{2-D} \quad (5)$$

作者简介:彭振斌,男,1951年生,教授,博士生导师,主要从事注浆、地基处理等教学、研究工作。

收稿日期:2004-07-27

3 砂卵砾石孔隙分维与孔隙度

为了模拟砂卵砾石的孔隙度, 可以看作是越来越小的砂不断粉结在较大的卵砾石上。将上述砂卵砾石分形模型构造中剩下的小立方体看作是海绵体的孔隙, 而去掉的小立方体看作是构成海绵体的骨架, 则该海绵体的孔隙分维 D_h 为

$$D_h = \lg N_n / \lg 3^n = \lg 14 / \lg 3 \quad (6)$$

孔隙体积 V_h 为

$$V_h = N_n S_n^3 = L^D S_n^{3-D} \quad (7)$$

这时孔隙度 Φ 为

$$\Phi = V_h / L^3 = (S_n / L)^{3-D} \quad (8)$$

4 砂卵砾石颗粒的统计分维与方法

砂卵砾石体具有自然分形结构^[3,4], 其分维数 D 可以定义为^[5,6]

$$N_{[r]} = \alpha^{-D} \quad (9)$$

式中: $N_{[r]}$ 为特征尺度大于 r 的砂卵砾石的数; r 为衡量砂卵砾石的特征尺度; α 为砂卵砾石的材料常数。

砂卵砾石的特征尺度定义为三轴几何平均直径: 即

$$r = (abc)^{1/3} \quad (10)$$

式中: a 、 b 、 c 分别为砂卵砾石颗粒的三轴。

知道特征尺度及对应的砂卵砾石的数目, 由式(9)就可以计算出砂卵砾石颗粒的统计分维 D 和材料常数 α , 也可以测出一系列的 r_i 和 N_i , 作出其双对数坐标, 则其直线斜率的绝对值即为统计分维^[7,8]

$$D = \left| \frac{\lg(N_{i+1}) - \lg(N_i)}{\lg(r_i) - \lg(r_{i+1})} \right| \quad (11)$$

式中: r_i 和 r_{i+1} 分别为两个衡量砂卵砾石颗粒的特征尺度; N_i 和 N_{i+1} 分别为对应于 r_i 和 r_{i+1} 特征尺度下的砂卵砾石颗粒数目。

田堪良等研究了我国黄河及陕西省的黑河、石头河、冯家山古河道河床天然沉积砂卵砾石分形特征, 得出其统计分维值分别为 2.72、2.55、2.67、2.71^[3]。

5 砂卵砾石理论颗粒分维与孔隙分维的关系

在构造模型中, 将剩下的小立方体看作是海绵体的孔隙, 而去掉的小立方体看作是构成海绵体的骨架块体颗粒, 则对应不同特征尺度下的砂卵砾石数目与孔隙数目的计算如表 1。

表 1 砂卵砾石颗粒数目与孔隙数目的统计计算

构造次数 n	1	2	3	...	n
特征尺度 r	$L/3$	$L/3^2$	$L/3^3$...	$L/3^n$
砂卵砾石颗粒数 $N_{[r]}$	13	$\frac{13(1-14^2)}{1-14}$	$\frac{13(1-14^3)}{1-14}$...	$\frac{13(1-14^n)}{1-14}$
孔隙数 N_n	14	14^2	14^3	...	14^n

根据表 1 计算出砂卵砾石颗粒的分维 D_g 为

$$D_g = \lg \left[\frac{13(1-14^{n+1})}{1-14} / \frac{13(1-14^n)}{1-14} \right] / \lg \left[\frac{L}{3^n} / \frac{L}{3^{n+1}} \right] = \lg \left[\frac{14^{n+1}-1}{14^n-1} \right] / \lg 3 \quad (12)$$

孔隙的分维 D_h 为

$$D_h = \lg \left[\frac{14^{n+1}}{14^n} \right] / \lg \left[\frac{L}{3^n} / \frac{L}{3^{n+1}} \right] = \lg 14 / \lg 3 \quad (13)$$

对于式(12), 当 $n \rightarrow \infty$, $D_g \rightarrow \lg 14 / \lg 3$, 此时,

$$D_g = D_h \quad (14)$$

对于一般情况, 砂卵砾石颗粒的分维 D_g 为

$$D_g = \lg \left[\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1} \right] / \lg \left[\frac{r_i}{r_{i+1}} \right] \quad (q > 1) \quad (15)$$

孔隙的分维数 D_h 为

$$D_h = \lg q / \lg \left[\frac{r_i}{r_{i+1}} \right] \quad (q > 1) \quad (16)$$

对于式(15), 当 $n \rightarrow \infty$, $D_h \rightarrow \lg q / \lg \left[\frac{r_i}{r_{i+1}} \right]$, 此时,

$$D_g = D_h \quad (17)$$

即颗粒的分维 D_g 与孔隙的分维 D_h 相等。当统计足够精细时, 颗粒统计分维 D 与理论分维 D_g 相等; 当统计不够精细时, 颗粒统计分维比理论分维略大。

6 砂卵砾石的统计分形特征及其与理论模型比较

6.1 砂卵砾石的统计分维值及孔隙度

由式(9)可以计算出砂卵砾石颗粒的分维 D 和材料常数 α 。例如由颗粒统计得到两个特征尺度及对应的砂卵砾石颗粒的数目如下:

当 $r = 100$ 时, $N_{[r]} = 25$; 当 $r = 60$ 时, $N_{[r]} = 90$ 。

将上述砂卵砾石统计结果带入式(9), 计算得到:

$$D = 2.51, \alpha = 2588756$$

由此可知: 砂卵砾石颗粒空间分布的统计分形特征为:

$$N_{[r]} = \alpha r^{-D} = 2588756r^{-2.51} \quad (18)$$

根据式(18)可以计算出任意特征尺度 r 及对应的砂卵石颗粒的数目 $N_{[r]}$;例如,表2就是根据式(18)计算出的结果。

若该砂卵石颗粒中最多最小的特征尺度 $r=2\text{mm}$,从表2可知 $N_{[r]}=455235$;初始元 $L=361\text{mm}$, $N_{[r]}=1$ 。

根据式(8)可得统计孔隙度 Φ 为

$$\Phi = \left(\frac{r}{L}\right)^{3-D} = \left(\frac{2}{361}\right)^{3-2.51} = 7.7\%$$

表2 r 对应的 $N_{[r]}$ 计算结果

r/mm	$N_{[r]}$	r/mm	$N_{[r]}$	r/mm	$N_{[r]}$
1	2588756	35	348	75	51
2	455235	40	249	80	44
5	45748	45	185	85	38
10	8045	50	142	90	33
15	2910	55	112	95	28
20	1415	60	90	100	25
25	808	65	74
30	512	70	61	361	1

6.2 砂卵石理论分维值及孔隙度

根据构造的模型,将剩下的小立方体看作是海绵体的孔隙,而去掉的小立方体看作是构成海绵体的骨架颗粒,则该模型分维的理论计算结果为

$$D_{\text{理}} = \lg 14 / \lg 3 = 2.4$$

将 $D=2.4$; $r=100$, $N_{[r]}=25$ 代入式(9)得

$$\alpha_1 = 1577393$$

将 $D=2.4$; $r=60$, $N_{[r]}=90$ 代入式(9)得

$$\alpha_2 = 1666501$$

所以,

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 1621947$$

$$N_{[r]} = 1621947r^{-2.4} \quad (19)$$

根据式(19)可以计算出任意特征尺度 r 及对应砂卵石颗粒数目(见表3)。

该砂卵石颗粒中最多最小的特征尺度 $r=2\text{mm}$,从表3可知,则 $N_{[r]}=307302$;初始元 $L=387\text{mm}$, $N_{[r]}=1$ 。

根据式(8)可得模型孔隙度 Φ 为

$$\Phi = \left(\frac{r}{L}\right)^{3-D} = \left(\frac{2}{387}\right)^{3-2.4} = 4.2\%$$

表3 r 对应的 $N_{[r]}$ 的理论计算结果

r/mm	$N_{[r]}$	r/mm	$N_{[r]}$	r/mm	$N_{[r]}$
1	1621947	35	319	75	51
2	307302	40	232	80	44
5	34081	45	175	85	38
10	6457	50	136	90	33
15	2440	55	108	95	29
20	1223	60	88	100	25
25	716	65	72
30	462	70	61	387	1

以上结果可以看出:模型的分维理论计算结果与实际统计结果有一定出入,统计结果略为偏大,这是因为统计的精度不够精细所致。由此可知,用该理论模型模拟砂卵石孔隙度特征是可行的。

7 结论

运用分形理论建立了砂卵石的孔隙分形理论模型,并得出了孔隙度的计算公式。在砂卵石层的注浆工程中,运用所建立的计算模型,根据拟注浆范围,可以计算注浆量以及预测注浆后的效果,指导注浆工程实践。

参考文献

- 1 Bagle M N, Raina A K, Chakraborty A K. Rock mass characterization by fractal dimension. *Engineering Geology*, 2002, (63): 141~155
- 2 Perfect E. Estimating soil mass fractal dimensions from water retention curves. *Geoderma*, 1999, (88): 221~231
- 3 田堪良,张慧莉,张伯平,等.天然沉积砂卵石粒度分布的分形结构研究.西北农林科技大学学报(自然科学版),2002,30(5):85~89
- 4 Justin B Butler, Stuart N Lane, Jim H Chandler. Characterization of the Structure of River-Bed Gravels Using Two-dimensional Fractal Analysis. *Mathematical Geology*, 2001, 33(3): 301~329
- 5 曾文曲,刘世耀译.分形几何—数学基础及其应用.沈阳:东北大学出版社,1996
- 6 张继春,钮强,徐小荷.岩体爆破过程中碎块形成规律的分形研究.金属矿山,1994,11:9~13
- 7 郁可,郑中山.粉体粒度分布的分形研究.材料科学与工程,1995,13(3):30~35
- 8 杨更社,刘增荣.岩石爆破块度分布的分形结构.西安矿业学院学报,1994,(2):120~125